ACTA SCIENTIARUM POLONORUM Oeconomia 3 (2) 2004, 75–83

ANALIZA PORTFELA O RYZYKU DOWOLNIE MAŁYM

Grzegorz Koszela
Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego w Warszawie

Streszczenie. Dążenie do minimalizacji ryzyka jest naturalną koncepcją inwestycyjną. W praktyce portfelowej koncepcja ta realizowana jest przez dołączenie do składu portfela papierów wolnych od ryzyka, których najbardziej popularnym reprezentantem są obligacje. W szczególności jest to możliwe nawet wtedy, gdy wyjściowo dysponuje się składem portfela o minimalnym ryzyku. Ryzyko portfela po dołączeniu obligacji może zmaleć dowolnie, jeśli w portfelu znajdzie się odpowiednio dużo tych obligacji. Dlatego też tworzone w niniejszej pracy portfele autor nazywa „portfelami o ryzyku dowolnie małym". Koncepcja tworzenia takich portfeli jest analogiczna do budowy portfeli z linii rynku kapitałowego (CML – ang.: capital market line).

Słowa kluczowe: portfel, ryzyko, portfel rynkowy, krótka sprzedaż

WSTĘP

Praca stanowi bezpośrednią kontynuację wcześniejszych publikacji autora [Koszela 2003] i [Koszela 2004]. W szczególności w pracy [Koszela 2004] uzyskano wzory na ryzyko i zysk tzw. portfela rynkowego, co w konsekwencji pozwoliło określić zakres zmian ryzyka i zysku dowolnego portfela z linii rynku kapitałowego, tzn. z prostej łączącej punkt odpowiadający obligacjom z punktem reprezentującym portfel rynkowy (w układzie współrzędnych ryzyka i zysku, tzn. odpowiednio odchylenia standardowego i oczekiwanej stopy zwrotu). Podano też wzory na skład, ryzyko i zysk takiego portfela w zależności od stopnia awersji do ryzyka bądź równoważnie – od stopnia oczekiwań uzyskania odpowiedniego zysku. Niestety, nie ma możliwości przeniesienia tych nowych wyników na przypadek portfeli wieloskładnikowych. Te możliwości powstają jednak po wprowadzeniu przez autora niniejszej pracy nowego pojęcia „portfela o ryzyku dowolnie małym". Wyjściowo dowolne zmniejszanie ryzyka odnosi się do portfela akcyjnego o minimalnym ryzyku z możliwością rozważenia portfela o dowolnej ilości akcji. Po dołączeniu obligacji ryzyko portfela może spaść nawet do zera. Możliwe jest również, dzięki krótkiej sprzedaży, uzyskanie (przynajmniej teoretycznie) dowolnie dużego zysku.

Adres do korespondencji – Corresponding author: Grzegorz Koszela, Katedra Ekonometrii i Informatyki, Szkoła Główna Gospodarstwa Wiejskiego, ul. Nowoursynowska 166, 02-787 Warszawa, e-mail: gkoszela@mors.sggw.waw.pl

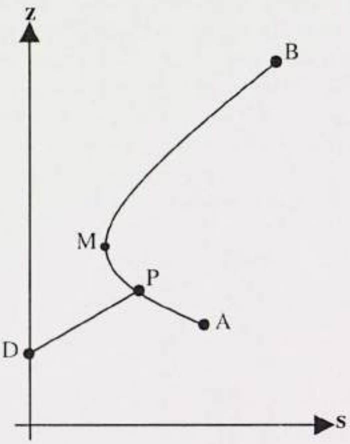
PORTFEL O RYZYKU DOWOLNIE MAŁYM

Jak zauważono w pracy [Koszela 2004], włączenie instrumentów wolnych od ryzyka do portfela oznacza utworzenie portfela dwuskładnikowego złożonego z instrumentów wolnych od ryzyka i ryzykownych akcji.

Niech P oznacza portfel złożony z dwóch rodzajów akcji A i B przynoszących zysk (oczekiwana stopa zwrotu) z_A i z_B, obarczonych ryzykiem (odchylenie standardowe) s_A i s_B oraz powiązanych według współczynnika korelacji $\rho_{AB} \in (-1, 1)$. W pracy [Koszela 2003] podano interpretację geometryczną zależności zysku od ryzyka opisaną przez odpowiednie równanie hiperboli.

Niech D oznacza obligację przynoszącą zysk z_D. Ponieważ akcje przynoszą na ogół większy zysk niż obligacje, więc można przyjąć, że $z_D < z_A$ oraz $z_D < z_B$. Nie zmniejszając ogólności rozważań, przyjmijmy też, że $z_A < z_B$ oraz $s_A < s_B$, co jest naturalne, gdyż w praktyce akcje przynoszące większy zysk są na ogół obarczone większym ryzykiem.

Ilustracją powyższej sytuacji jest poniższy rysunek.

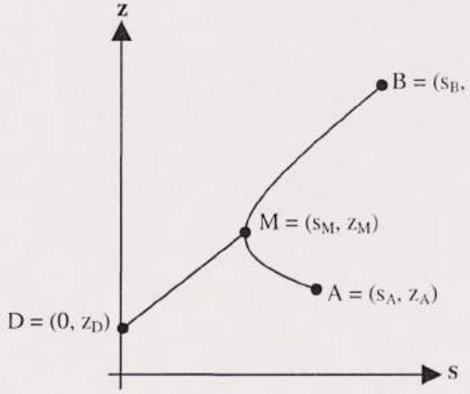


Rys. 1. Portfel złożony z obligacji i dwóch rodzajów akcji
Fig. 1. Portfolio made from bonds and two types of equities
Źródło: Opracowanie własne.
Source: Own elaboration.

Odcinek DP ilustruje wszystkie portfele trójskładnikowe złożone z akcji A, B i obligacji D, przy czym skrajnie punkt D obrazuje portfel złożony wyłącznie z obligacji, a punkt P – wyłącznie z akcji. Przesuwając się po odcinku DP w kierunku od D do P zwiększamy w takim portfelu udział akcji kosztem obligacji. Z kolei przesuwając się po hiperboli z punktem P w kierunku B osiągamy minimalne ryzyko portfela złożonego z samych akcji w punkcie M.

Jak zauważył autor [Koszela 2004], pojęcie portfela rynkowego rozważa się wyłącznie w odniesieniu do portfela złożonego z dwóch rodzajów akcji i jednego rodzaju obligacji. Kłopoty z przeniesieniem podanej teorii na przypadek portfeli wieloskładnikowych polegają na tym, że począwszy od portfela trójskładnikowego nie istnieje przejrzysty odpowiednik równania określającego związek między zyskiem a ryzykiem. W zależności tej dla portfela dwuskładnikowego występują stopy zwrotu, odchylenia standardowe i współczynnik korelacji dwóch akcji [Koszela 2003]. W portfelach wieloskładnikowych występują ponadto udziały wybranych akcji (w trójskładnikowym – jeden udział, w czteroskładnikowym – dwa udziały, itd.). W portfelu rynkowym zasadnicze znaczenie ma odpowiednia styczna do hiperboli, jej równanie i punkt styczności z hiperbolą. Oznacza to niemożliwość przeniesienia tego zagadnienia na przypadek portfela złożonego z wielu rodzajów akcji (co najmniej trzech) i jednego rodzaju obligacji.

Okazuje się jednak, że istnieje możliwość rozważenia analogicznego zagadnienia do zagadnienia portfela rynkowego, dającego się bez istotnych kłopotów przenieść na przypadek portfeli złożonych z dowolnie wielu rodzajów akcji i jednego rodzaju papierów wolnych od ryzyka. Tę nową koncepcję nazwiemy zagadnieniem portfela o ryzyku dowolnie małym. Wyjściowo dysponujemy tu składem portfela akcji o minimalnym ryzyku i jednym rodzajem obligacji. Daje to możliwość dalszego zmniejszania ryzyka w zależności od udziału obligacji w takim portfelu. Skrajnie ryzyko to może być nawet zerowe – gdy ograniczymy się do obligacji, bądź maksymalne (równe minimalnemu ryzyku portfela złożonego z samych akcji) – gdy ograniczymy się do samych akcji. Portfele z odcinka łączącego punkty odpowiadające tym „skrajnym" portfelom nazywamy ***portfelami o ryzyku dowolnie małym***. Poniższy rysunek podaje interpretację geometryczną tego zagadnienia dla portfela złożonego z dwóch rodzajów akcji przy $\rho_{AB} \in (-1, 1)$ oraz z jednego rodzaju obligacji.



Rys. 2. Portfele o ryzyku dowolnie małym
Fig. 2. Arbitrarily small risk portfolios
Źródło: Opracowanie własne.
Source: Own elaboration.

Odcinek DM obrazuje wszystkie portfele o ryzyku dowolnie małym. Przenoszą się w sposób analogiczny wzory na udział w portfelu, wyprowadzone dla dowolnego portfela z linii CML [Koszela 2004]:

Oznaczmy:

s – ryzyko (odchylenie standardowe) portfela,
z – zysk (oczekiwaną stopę zwrotu) portfela,
s_M – minimalne ryzyko portfela złożonego z samych akcji,
z_M – zysk odpowiadający ryzyku s_M,
w_D – udział wartościowy obligacji w portfelu,

w_A – udział wartościowy akcji A w portfelu,
w_C – udział wartościowy akcji B w portfelu.
Dla dowolnego $(s, z) \in DM$ otrzymujemy:

$$w_D = 1 - \frac{s}{s_M} \tag{1}$$

$$w_A = \frac{\begin{vmatrix} z - w_D \cdot z_D & z_B \\ 1 - w_D & 1 \end{vmatrix}}{z_A - z_B} \qquad w_B = \frac{\begin{vmatrix} z_A & z - w_D \cdot z_D \\ 1 & 1 - w_D \end{vmatrix}}{z_A - z_B} \tag{2}$$

Odcinek DM ma równanie postaci:

$$z = \frac{z_M - z_D}{s_M} \cdot s + z_D \tag{3}$$

PRZYKŁAD 1.

Wyemitowano dwa rodzaje akcji: A – przeznaczonych na rozwój agroturystyki, B – przeznaczonych na rozwój infrastruktury. Podać zysk i skład portfela o ryzyku dowolnie małym wynoszącym 2%, utworzonego w odniesieniu do akcji A i B, obarczonych ryzykiem odpowiednio 5%, 8%, przynoszących zysk odpowiednio 6%, 14%, powiązanych według współczynnika korelacji równego 0,5 oraz do obligacji przynoszącej zysk 4%.

$s_A = 5\%$ $\quad s_B = 8\%$ $\quad z_A = 6\%$ $\quad z_B = 14\%$
$\rho_{AB} = 0{,}5$ $\quad s = 2\%$ $\quad z_D = 4\%$

W pracy [Marshall, Bansal] podano równanie hiperboli AB. Stąd otrzymujemy:

$$AB: \quad \frac{s^2}{(4{,}95)^2} - \frac{(z - 6{,}80)^2}{(5{,}66)^2} = 1$$

Stąd

$s_M = 4{,}95\%$ $\qquad z_M = 6{,}80\%$.

Ze wzoru (3) otrzymujemy

$$z = \frac{z_M - z_D}{s_M} \cdot s + z_D = \frac{6{,}80 - 4}{4{,}95} \cdot 2 + 4 = 5{,}13$$

tzn.

$z = 5{,}13\%$

Ze wzorów (1) i (2) otrzymujemy:

$$w_D = 1 - \frac{2}{4{,}95} = 0{,}60 \qquad w_A = \frac{\begin{vmatrix} 5{,}13 - 0{,}60 \cdot 4 & 14 \\ 1 - 0{,}60 & 1 \end{vmatrix}}{6 - 14} = 0{,}36$$

$$w_B = 1 - w_D - w_A$$

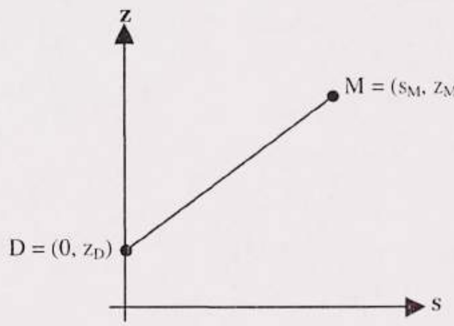
$$w_B = 1 - 0{,}60 - 0{,}36 = 0{,}04$$

tzn.

$w_D = 60\%$, $w_A = 36\%$, $w_B = 4\%$.

Uwaga: Oczywiście można też było zadać z góry stopę zwrotu takiego portfela (np. $z = 5{,}13\%$) i z równania $z = \frac{6{,}80 - 4}{4{,}95} \cdot s + 4$ wyliczyć odpowiadające mu ryzyko $s = 2\%$.

Pojęcie portfela dowolnie małego ryzyka można łatwo przenieść na przypadek portfela złożonego z n rodzajów akcji i jednego rodzaju obligacji. Podobnie jak poprzednio, wyjściowo nieistotna jest znajomość zależności między ryzykiem a zyskiem portfela złożonego z samych akcji.



Rys. 3. Portfele o ryzyku dowolnie małym – przypadek ogólny
Fig. 3. Arbitrarily small risk portfolios – general case
Źródło: Opracowanie własne.
Source: Own elaboration.

Odcinek DM obrazuje wszystkie portfele o ryzyku dowolnie małym. Jego równanie jest identyczne ze wzorem (3). Oczywiście wzór na udział obligacji jest identyczny ze wzorem (1). Wzory na udział akcji znajdujemy rozwiązując układ równań:

$$\begin{cases} z = w_D \cdot z_D + w_1 \cdot z_1 + \ldots + w_n \cdot z_n \\ w_D + w_1 + \ldots + w_n = 1 \end{cases} \tag{4}$$

Ustalając udział n – 2 rodzajów akcji, np. $w_3, \ldots, w_n$ otrzymujemy:

$$\begin{cases} z_1 \cdot w_1 + z_2 \cdot w_2 = z - w_D \cdot z_D - w_3 \cdot z_3 - \ldots - w_n \cdot z_n \\ w_1 + w_2 = 1 - w_D - w_3 - \ldots - w_n \end{cases} \tag{5}$$

Stąd:

$$w_1 = \frac{\begin{vmatrix} z - w_D \cdot z_D - w_3 \cdot z_3 - \ldots - w_n \cdot z_n & z_2 \\ 1 - w_D - w_3 - \ldots - w_n & 1 \end{vmatrix}}{z_1 - z_2} \tag{6}$$

$$w_2 = \frac{\begin{vmatrix} z_1 & z - w_D \cdot z_D - w_3 \cdot z_3 - \ldots - w_n \cdot z_n \\ 1 & 1 - w_D - w_3 - \ldots - w_n \end{vmatrix}}{z_1 - z_2} \tag{7}$$

gdzie ryzyko *s* i zysk *z* portfela o ryzyku dowolnie małym związane są analogicznie jak poprzednio zależnością (3).

Wartości s_M i z_M wyznaczamy metodami analizy matematycznej.

PRZYKŁAD 2.

Wyemitowano trzy rodzaje akcji: A – przeznaczonych na rozwój agroturystyki, B – przeznaczonych na rozwój infrastruktury, C – przeznaczonych na rozwój produkcji cukru. Znaleźć zysk i skład portfela o ryzyku dowolnie małym wynoszącym 1%, złożonego z akcji A, B, C (obarczonych ryzykiem 3%, 5%, 8%, przynoszących zysk 8%, 10%, 15% i powiązanych według współczynników korelacji $\rho_{AB} = 0,4$, $\rho_{AC} = 0,2$, $\rho_{BC} = -0,3$) oraz obligacji dającej zysk 5%.

$s_A = 3\%$ $s_B = 5\%$ $s_C = 8\%$

$z_A = 8\%$ $z_B = 10\%$ $z_C = 15\%$

$\rho_{AB} = 0,4$ $\rho_{AC} = 0,2$ $\rho_{BC} = -0,3$

$s = 1\%$ $z_D = 5\%$

Metodami analizy matematycznej otrzymujemy:

$\mathbf{s_M = 2,81\%}$ $\mathbf{z_M = 9,19\%}$

Ze wzoru (1) mamy:

$$w_D = 1 - \frac{1}{2,81} = 0,64, \qquad \text{tzn.} \qquad \mathbf{w_D = 64\%}$$

Z kolei ze wzoru (3) mamy:

$$z = \frac{9,19 - 5}{2,81} \cdot 1 + 5 = 6,49, \qquad \text{tzn.} \qquad \mathbf{z = 6,49\%}$$

Wszystkie trzy akcje obarczone są ryzykiem znacznie większym od oczekiwanego poziomu 1%. Oznacza to, że udział ich w portfelu musi być minimalny. Szczególnie dotyczy to akcji C (8% > 1%). Dlatego też przyjmiemy $\mathbf{w_C = 2\%}$. Korzystając ze wzoru (6) dla n = 3 mamy:

$$w_A = \frac{\begin{vmatrix} z - w_D \cdot z_D - z_C \cdot w_C & z_B \\ 1 - w_D - w_C & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} z_A & z_B \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = \frac{\begin{vmatrix} 6,49 - 0,64 \cdot 5 - 15 \cdot 0,02 & 10 \\ 1 - 0,64 - 0,02 & 1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 8 & 10 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}} = 0,20,$$

czyli:

$\mathbf{w_A = 20\%}$

Wreszcie

$$w_B = 1 - w_D - w_A - w_C = 1 - 0{,}64 - 0{,}20 - 0{,}02 = 0{,}14,$$

tzn.

$\mathbf{w_B = 14\%}$

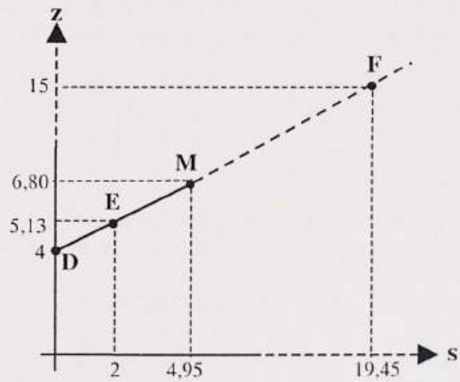
Na zakończenie podamy teraz przykład ilustrujący tzw. ***krótką sprzedaż*** w zagadnieniu portfela. Dotyczy to sytuacji, gdy jeden lub kilka udziałów jest ujemnych. W konsekwencji co najmniej jeden udział przyjmuje wartość większą od 1.

PRZYKŁAD 3.

Kupiono akcje A, B i obligacje D z przykładu 1, tworząc portfel o ryzyku dowolnie małym wynoszącym 2%. Portfel ten obrazuje punkt E = (2; 5,13) na rysunku 4. Po pewnym czasie zysk z tych obligacji znacznie wzrósł, co spowodowało wzrost ich ceny. Za pieniądze uzyskane z ich sprzedaży zakupiono akcje A i B. Podać skład portfela o ryzyku dowolnie małym przynoszącego zysk w wysokości 15% oraz to ryzyko. Portfel ten obrazuje punkt F leżący na przedłużeniu odcinka DM, po prawej stronie punktu M.

Ze wzoru (3) mamy

$$15 = \frac{6{,}80 - 4}{4{,}95} \cdot s + 4, \qquad \text{tzn.} \qquad \mathbf{s = 19{,}45\%}$$



Rys. 4. Krótka sprzedaż – ilustracja dla przykładu 3
Fig. 4. Short sell – the illustration for example number 3
Źródło: Opracowanie własne.
Source: Own elaboration.

Ze wzoru (1) mamy:

$$w_D = 1 - \frac{19{,}45}{4{,}95} = -2{,}93,$$

tzn.

$\mathbf{w_D = -293\%}$

Z kolei z (2) mamy:

$$w_A = \frac{\begin{vmatrix} 15+2{,}93\cdot 4 & 14 \\ 1+2{,}93 & 1 \end{vmatrix}}{6-14} = 3{,}54$$

czyli:

$w_A = 354\%$

Na koniec

$$w_B = 1-(-2{,}93)-3{,}54 = 0{,}39$$

czyli

$w_B = 39\%$

UWAGI KOŃCOWE

W niniejszej pracy wprowadzono pojęcie portfela o ryzyku dowolnie małym. Wyjściowo dowolne zmniejszanie ryzyka odnosi się do portfela akcyjnego o minimalnym ryzyku z możliwością rozważenia portfela o dowolnej ilości akcji (co nie było możliwe w przypadku portfeli z linii CML). Po dołączeniu odpowiedniej ilości obligacji ryzyko portfela może zbliżyć się nawet do zera. Możliwe jest również, dzięki krótkiej sprzedaży, znaczne zwiększenie zysku.

PIŚMIENNICTWO

Chiang A.C., 1994. Podstawy ekonomii matematycznej. PWE, Warszawa.

Elton E.J., Gruber M.J., 1991: Modern portfolio theory and investment analysis. Wiley, New York.

Francis J.C., 1991. Investments: analysis and management. McGraw-Hill, New York.

Jajuga K., Jajuga T., 1999. Inwestycje. PWN, Warszawa.

Koszela G., 2001. Analiza geometryczna zależności między ryzykiem a zyskiem w dwuskładnikowym portfelu akcji. W: Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych – II. Wydaw. SGGW, Warszawa.

Koszela G., 2003. Analiza portfela dwuskładnikowego. Roczniki Nauk Rolniczych, Seria G, T. 90, Z. 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, s. 113–127.

Koszela G., 2004. Analiza portfela rynkowego. Ekonomika i Organizacja Gospodarki Żywnościowej, Zeszyty Naukowe SGGW (w druku).

Markowitz H.M., 1959. Portfolio selection – efficient diversification of investments. Yale University Press, New Haven.

Marshall J.F., Bansal V.K., 1992. Financial engineering. New York Institute of Finance, New York.

ANALYSIS OF ARBITRARILY SMALL RISK PORTFOLIO

Abstract. In the paper there have been given formulae for risk and return of market portfolio, and, consequently, the range of risk and return variation of any portfolio from the capital market line. There have also been given formulae for composition, risk, and return of such a portfolio, depending on the level of risk aversion, or, as an equivalent, on the level of expectations of an adequate return. Unfortunately, it is impossible to apply the new results to multi-element portfolios. However, such a possibility arises after the introduction of a notion of an arbitrarily small risk portfolio in this paper. Initially, the arbitrary decrease of risk refers to a minimum risk stock portfolio, with a possibility of considering a portfolio with an arbitrary number of stocks. After the inclusion of bonds, the portfolio's risk may fall even to zero. Due to the short sale, it is also possible (at least, theoretically) to obtain arbitrarily big return.

Key words: portfolio, risk, risk portfolio, short sale

Zaakceptowano do druku – Accepted for print: 10.12.2004